

§2 Καρτεσιανό μοντέλο

Ος χώρος θεωρούμε τον 3-διάστατο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Τα σημεία θα είναι οι τριάδες

$$X = (x_1, x_2, x_3)$$

Εφοδίασμε τον $\mathbb{R}^3$ με πράξεις "+" και "·".

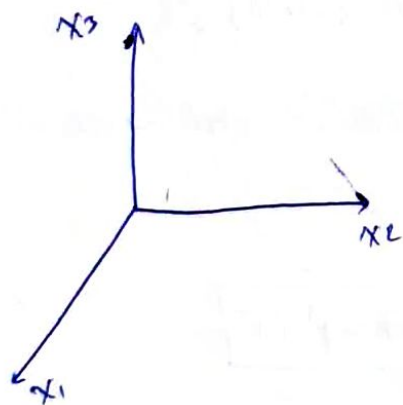
$$(a) \quad x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$(b) \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

Η συνδυασ βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

Τότε
$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$



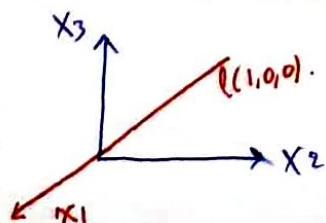
Υπενθυμίζουμε ότι οι γνήσιοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ έχουν διάσταση 1 ή 2.

Οι υπόχωροι διάστασης 1 είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \ell_v &= \text{span} \{v\} (= \langle v \rangle) \\ &= \{\pm v : t \in \mathbb{R}\}, v \neq 0. \end{aligned}$$

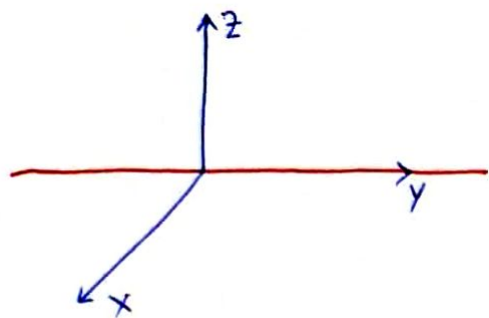
Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} \ell_{(1,0,0)} &= \text{span} \{(1,0,0)\} \\ &= \{\pm (1,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$



Παρατήρηση: Έαν $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, τότε $\text{span}\{v\} = \text{span}\{\lambda v\}$
 όπου $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Για παράδειγμα. $\{(0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(0, 5t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$

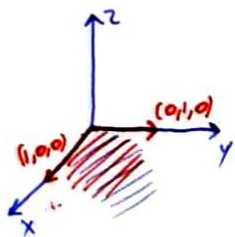


⊕ Οι ολόκληροι διδιστάσεις 2 είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \Pi_{v,w} &= \text{span}\{v, w\} \\ &= \{tv + \lambda w : t, \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

όπου v, w γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 2



$$\begin{aligned} v &= (1, 0, 0) \\ w &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

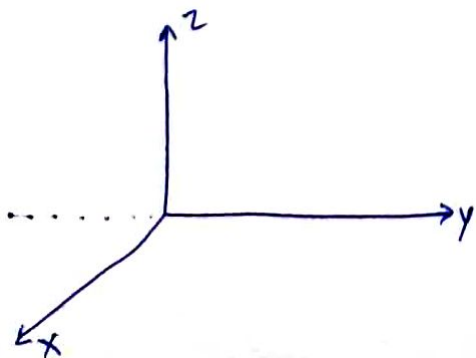
$$\begin{aligned} \text{όρα } \Pi_{v,w} &= \{tv + \lambda w : t, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) : t, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t, \lambda, 0) : t, \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

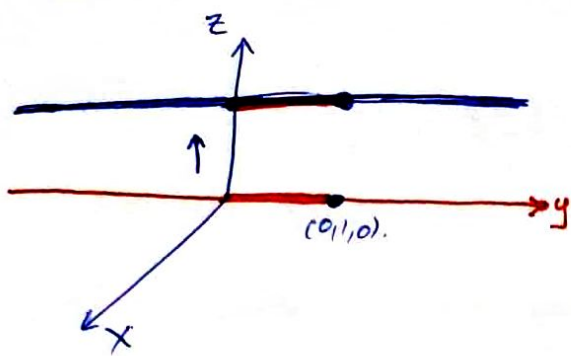
Στόχος μας είναι να ορίσουμε τις κλίσεις των "ευθειών" και "επιπέδων" που $\mathbb{R}^3$. Ας ξεκινήσουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός: Κάθε απεικόνιση $T_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $T_v(p) = p + v$
 λέγεται παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα

Ας πάρουμε ως $v = (0, 0, 1)$. Θα βρούμε πως μετασχηματίζεται ο άξονας y μέσω της απεικόνισης $T_v = T_{(0,0,1)}$.





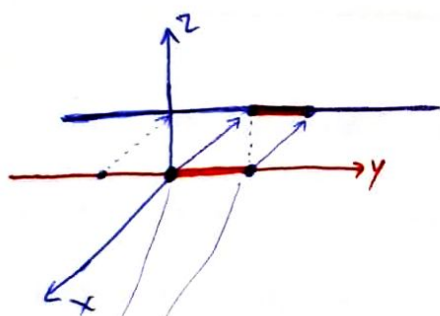
Πέρασμα Ισοφάσε

παρ/λη μεταφορά
του κόκκινου
κόβρασι.

$$T_{(0,0,1)}(0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,1) = (0,0,1)$$

$$T_{(0,0,1)}(0,1,0) = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1)$$

β) Ας υπολογίσουμε πως θα μεταχηματιστεί ο y-άξονας μέσω της $T_{(0,1,1)}$



δίνεται παρ/λη
μεταφορά
του κόκκινου
κόβρασι.

$$T_{(0,1,1)}(0,0,0) = (0,0,0) + (0,1,1) = (0,1,1)$$

$$T_{(0,1,1)}(0,1,0) = (0,2,1)$$

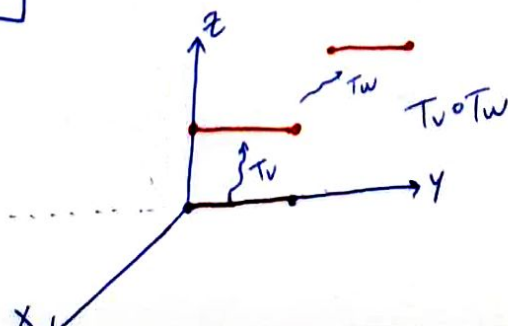
γ) Εάν $v = (0,0,p)$ τότε $T_v(p) = T_0(p) = p + 0 = p$

$$\boxed{T_0(p) = p}$$

ταυτοτική απεικόνιση

Πρόταση: Η ανθεκτική παράλληλη μεταφορών είναι πάλι παράλληλη μεταφορά.
Επίσης, κάθε παράλληλη μεταφορά T_v είναι αντιστρέψιμη με αντιστροφή.

$$\boxed{T_v^{-1} = T_{-v}}$$



Απόδειξη:

Υπολογίζουμε $T_v \circ T_w(p) = T_v(T_w(p)) = T_v(p+w) = p+w+v = T_{w+v}(p)$.

Επομένως

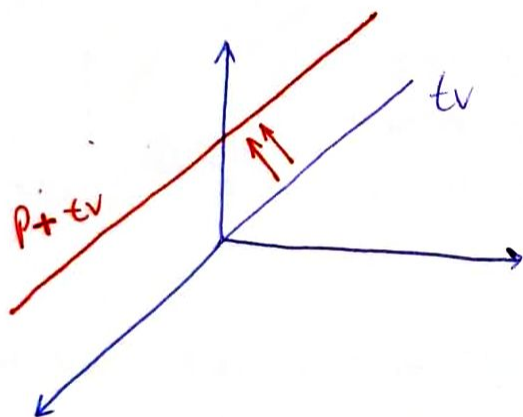
$$T_v \circ T_w = T_{w+v}$$

Επιπλέον, $T_v \circ T_{-v} = T_{v-v} = T_0 = I$.

$$\Rightarrow T_{-v} = T_v^{-1}$$

Ορισμός: Οι ευθείες του $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα σύνολα της μορφής

είναι
αφρόδο $\rightarrow$ $L = \{p + tv : t \in \mathbb{R}, v \neq 0\}$
σημείο $\rightarrow$ p $\rightarrow$ διάνυσμα $\rightarrow$ v



Παρατήρηση:

- (1) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή $O(0,0,0)$ είναι υπόχωροι διάστασης 1.
- (2) Οι ευθείες είναι εικόνες ισοχώρου διάστασης 1 μέσω παραλληλάνυμων μεταφορών.

Πρόταση: Έαν ότι $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και $v = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$
 δίδωμε τότε:

(i) Η ευθεία $\ell_{p,v}$ είναι το άνω των σημείων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 όπου

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

(ii) Η ευθεία $\ell_{p,v}$ είναι το άνω λύσεων των εξισώσεων

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \rightarrow \text{έχουμε 2 εξισώσεις.}$$

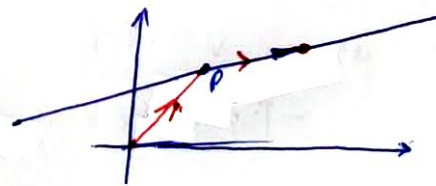
Οπου εδώ ακολουθούμε την εξής αμβρα:

Έαν κάποιο από τα v_1, v_2, v_3 είναι μηδέν τότε η ποσότητα που εμφανίζεται στον αντίστοιχο αριθμητή είναι μηδέν.

α' τρόπος

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Ολες τις ευθείες τις γράφω έτσι.



Απόδειξη:

(i) Έαν (x, y, z) σημείο της ευθείας $(x, y, z) \in \ell_{p,v}$ αυτό θα σημαίνει
 ότι $\exists t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(x, y, z) = p + tv = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$.
 $\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$

(ii) Λύνοντας το σύστημα $(*)$ ως προς t βρίσκουμε

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{x-x_0}{v_1} \\ t &= \frac{y-y_0}{v_2} \\ t &= \frac{z-z_0}{v_3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

Παράδειγμα

Ας βρούμε τις (διαφορές) εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P = (1, 1, 1)$ και παράλληλο ως προς το διάνυσμα $v = (-1, 0, 2)$.

Έχουμε

$$x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1.$$

$$v_1 = -1, v_2 = 0, v_3 = 2$$

Άρα $x = x_0 + tv_1 = 1 - t$

$$y = y_0 + tv_2 = 1$$

$$z = z_0 + tv_3 = 1 + 2t.$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$$

συνιστώσες σημείου
συνιστώσες διανύσματος

↑
ή

Θεώρημα: Από δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^3$ διέρχεται ακριβώς μια ευθεία.

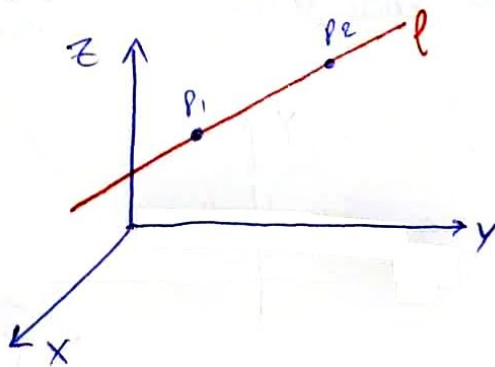
Απόδειξη

Έστω ότι $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία.

Θεωρώ ως $P = P_1(x_1, y_1, z_1)$

και ως $v = P_2 - P_1$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Επίσης, θεωρούμε την ευθεία

$$l_{P,v} = \{P_1 + t(P_2 - P_1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Η ευθεία διέρχεται από τα P_1, P_2 διότι για $t=0 \rightarrow P_1$
 $t=1 \rightarrow P_2$

Απόδειξη ν.α.ο. η ευθεία αυτή είναι η μοναδική που διέρχεται από τα P_1, P_2 .

Ας υποθέσουμε ότι $l_{P_0,w}$ είναι ευθεία η οποία διέρχεται από τα P_1, P_2
Θα δ.ο. $l_{P_0,w} = l_{P,v}$

Πραγματικά: υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $P_1 = P_0 + t_1 w$ (1)
 $P_2 = P_0 + t_2 w$ (2)

Από τις εξισώσεις (1) και (2), λαμβάνουμε $p_2 - p_1 = (t_2 - t_1) \omega$ (3).
Επομένως, $\ell_{p, \omega} = p_0 + \text{span}\{\omega\}$

$$\stackrel{(1)}{=} p_1 - t_1 \omega + \text{span}\{\omega\} \\ = p_1 + \text{span}\{\omega\}.$$

$$\stackrel{(3)}{=} p_1 + \text{span}\{p_2 - p_1\} \\ = \ell_{p, v}.$$